Devoir maison n° 12

Exercice 1 : La somme S des éléments de la tables de Pythagore est la somme des 10 premiers termes de 10 suites arithmétiques de raisons 1 à 10 et de premiers termes respectifs 1 à 10 d'où :
$S = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 11 \times \dfrac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55 \times 55 = 3025$

Exercice 2 : Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

1. Sens de variation de (u_n) : les termes de la suite sont strictement positif car inverses de nombres positifs et
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+2} < 1$ donc la suite est décroissante.
2. Par identification on démontre que, pour tout entier naturel n non nul, u_n peut s'écrire sous la forme
$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1},$$
3. On pose, pour tout $n \geqslant 1$: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   a. Calculons : $S_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}$, $S_2 = u_1 + u_2 = \dfrac{2}{3}$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$ et $S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = S_3 + u_4 = \dfrac{4}{5}$
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$
   c. La suite (S_n) est une somme de nombres positifs dont on rajoute un terme positif à chaque rang, donc la suite est croissante.
4. La suite (S_n) est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant S_n \leqslant 1$. En effet, S_n est une somme de nombres positifs donc est positive et $1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.
5. Limite de S_n : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$
6. a. Calculons $T_n = 1 - S_n = 1 - 1 + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < T_n \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow n+1 \geqslant 100 \Leftrightarrow n \geqslant 99$?
   c. Nombre de termes de la suite S_n n'appartenant pas à l'intervalle $[0,99\ ;\ 1]$:
   $S_n \notin [0,99\ ;\ 1] \Leftrightarrow 0 < T_n \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow n+1 \geqslant 100 \Leftrightarrow n \geqslant 99$.
   Il y a 99 termes n'appartenant pas à cet intervalle.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$, la suite définie par $u_n = \dfrac{3^n}{n^3}$.

1. $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ car $3^n > 0$ et $n^3 > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 3\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^3$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$.
   f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = 3\dfrac{x^2}{(x+1)^4} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ et $f(0) = 0$ donc $0 \leqslant f(x) < 1$

3. Sens de variation de (u_n) : pour $n = 3$, $f(3) = \dfrac{27}{64} > \dfrac{1}{3}$.
   Donc à partir de $n = 3$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite est croissante.