Correction des exercices 65 d. et 66 p71

Énoncé

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f : x \mapsto 1 - (2x+3)^2$ sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$;
2. $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$;
3. $f : x \mapsto 1 - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;
4. $f : x \mapsto 1 - \dfrac{2}{1-3x}$ sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$
5. $f : x \mapsto 1 - 2x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1\ ;\ +\infty[$

Correction

1. Déterminons le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 1 - (2x+3)^2$ sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$:

   Soient : $u : x \mapsto 2\,x + 3$; $v : x \mapsto x^2$ $w : x \mapsto 1 - x$

   Montrons que $f = w \circ v \circ u$: Soit $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$,
   $w \circ v \circ u(x) = w \circ v[u(x)] = w \circ v(2x+3) = w[v(2x+3)] = w((2x+3)^2) = 1 - (2x+3)^2 = f(x)$
   De plus :
   $x \in \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right] \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{3}{2}$ u est une fonction affine **croissante** sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$ car $2 > 0$
   $\Rightarrow u(x) \leqslant u(-\dfrac{3}{2}) \Leftrightarrow 2x+3 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x+3 \in\ ]-\infty\ ;\ 0]$ v est une fonction **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0]$
   $\Rightarrow v(2x+3) \geqslant v(0) \Leftrightarrow (2x+3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x+3)^2 \in [0\ ;\ -\infty[$
   w est une fonction affine **décroissante** sur $[0\ ;\ -\infty[$ car $-1 < 0$
   Par composition, $f = w \circ v \circ u$ est une fonction croissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right]$
   Autre solution sans utiliser les fonctions composées mais les fonctions associées :
   Soit $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$, $f(x) = -4\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + 1 = -4v(x + \dfrac{3}{2}) + 1$ où $v : x \mapsto x^2$ est la fonction carré décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
   Comme $-4 < 0$, $x \mapsto -4x$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$, par translation de vecteur $-\dfrac{3}{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, f est croissante sur $]-\infty; -\frac{3}{2}]$

2. Déterminons le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$:

   Soient : $u : x \mapsto 2\,x + 1$; $v : x \mapsto \sqrt{x}$

   Montrons que $f = v \circ u$: Soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, $v \circ u(x) = v[u(x)] = v(2x+1) = \sqrt{2x+1} = f(x)$
   De plus :
   $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[\Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ u est une fonction affine **croissante** sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ car $2 > 0$
   $\Rightarrow u(x) \geqslant u(-\dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow 2x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x+1 \in [0\ ;\ +\infty[$ v est une fonction **croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$
   Par composition, $f = v \circ u$ est une fonction croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
   Autre solution sans utiliser les fonctions composées mais les fonctions associées :
   Soit $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, $f(x) = \sqrt{2}\sqrt{x + \dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}v(x + \dfrac{1}{2})$ où $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction racine carrée croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Comme $\sqrt{2} > 0$, $x \mapsto \sqrt{2}\sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, par translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\vec{\imath}$, f est croissante sur $]-\frac{1}{2}; +\infty]$

Rappel : si un nombre x est strictement positif alors son inverse $\dfrac{1}{x}$ est strictement positif et réciproquement.

3. Déterminons le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$:

   Soient : $u : x \mapsto x^2$; $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $w : x \mapsto 1 - 2x$

   Montrons que $f = w \circ v \circ u$: Soit $x > 0$,

   $w \circ v \circ u(x) = w \circ v[u(x)] = w \circ v(x^2) = w[v(x^2)] = w(\dfrac{1}{x^2}) = 1 - \dfrac{2}{x^2} = f(x)$

   De plus :

   $x \in]0\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow x > 0$ u est une fonction **strictement croissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$

   $\Rightarrow u(x) > u(0) \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 \in]0\ ;\ +\infty[$ v est une fonction **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} \in]0\ ;\ +\infty[$ w est une fonction affine **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$ car $-2 < 0$

   Par composition, $f = w \circ v \circ u$ est une fonction croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

4. Déterminons le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{2}{1-3x}$ sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$:

   Soient : $u : x \mapsto 1 - 3x$; $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $w : x \mapsto 1 - 2x$

   Montrons que $f = w \circ v \circ u$: Soit $x < \dfrac{1}{3}$,

   $w \circ v \circ u(x) = w \circ v[u(x)] = w \circ v(1-3x) = w[v(1-3x)] = w(\dfrac{1}{1-3x}) = 1 - \dfrac{2}{1-3x} = f(x)$

   De plus :

   $x \in \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[\Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}$ u est une fonction **strictement décroissante** sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$

   $\Rightarrow u(x) > u(\dfrac{1}{3}) \Leftrightarrow 1 - 3x > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x \in]0\ ;\ +\infty[$ v est une fonction **strictement décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-3x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-3x} \in]0\ ;\ -\infty[$ w est une fonction affine **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$ car $-2 < 0$

   Par composition, $f = w \circ v \circ u$ est une fonction décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$

5. Déterminons le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1\ ;\ +\infty[$:

   f est la somme de la fonction affine $g : x \mapsto 1 - 2x$ décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$ (car $-2 < 0$)

   et de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$

   Étudions h :

   Soient : $u : x \mapsto x - 1$; $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $w : x \mapsto x^2$

   Montrons que $h = w \circ v \circ u$: Soit $x > 1$,

   $w \circ v \circ u(x) = w \circ v[u(x)] = w \circ v(x-1) = w[v(x-1)] = w(\dfrac{1}{x-1}) = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 = h(x)$

   De plus :

   $x \in]1\ ;\ +\infty[\Leftrightarrow x > 1$ u est une fonction affine **croissante** sur $]1\ ;\ +\infty[$ car $1 > 0$

   $\Rightarrow u(x) > u(1) \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x - 1 \in]0\ ;\ +\infty[$ v est une fonction **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$

   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} \in]0\ ;\ +\infty[$ w est une fonction affine **croissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$

   Par composition, $h = w \circ v \circ u$ est une fonction décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$

   Conclusion : par somme, $f = g + h$ est une fonction décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$.